

## 「数学のよさ」を実感し、よさを生かして問題を解決する生徒の育成

名古屋市立前津中学校 福岡 美沙

### 1 研究のねらい

私は、生徒に「生活や学習に関する問題に対して数学的に考え、解決できるようになって欲しい」と考えている。これは、学習指導要領において育成を目指す資質・能力の「学びに向かう力、人間性等」に関わるものである。中学校学習指導要領解説数学編では、この資質・能力の育成に向けて、「生徒が数学の学習に主体的に取り組むことができるようになるためには、数学的活動の楽しさや数学のよさを実感することが大切である」と示している。そして、数学のよさについては、「数学的な表現や処理のよさや、数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則のよさ、数学的な見方・考え方を働かせることのよさなどを意味する」と示している。このことから、日々の学習において「数学のよさ」を実感させることで、社会や実生活において「あてずっぽう」や「ただやみくもに」問題を解決するのではなく、直観的、論理的に考察したり、数量の変化や対応を捉えて考察したりと、数学を用いて問題解決できるようになると考える。

本校の3年生は、1年生では比例反比例の考え方をを用いて実際に自分の視力を計測したり、2年生では一次関数の考え方をを用いてタブレットの使用時間から充電量を予測したりと、「数学の実用性」を実感できるような授業を経験してきた。これらの授業に関わる内容について、素直に「役に立つんだ」と実感する生徒が多くいた。一方で、「一次関数は役立つことがわかったが、さすがに証明は日常生活では使わないと思う」といった感想をもつ生徒もあり、数学の実用性ばかりに焦点を当てると、日常生活でそのまま使えるかどうかには価値を見出してしまう恐れがあると考えた。

そこで、本年度は数学の実用性だけではなく、「数学的な表現や処理のよさや、数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則のよさ、数学的な見方・考え方を働かせることのよさ」といった「数学のよさ」についても実感させるよう実践を行う。数学のよさを実感するには、「学ぶ過程で、数学的な知識及び技能を確実に用いることができるようになったり、思考力、判断力、表現力等を発揮することによって能率的に物事を処理できるようになったり、事柄を簡潔かつ明瞭に表現して的確に捉えることができるようになったりする成長の過程を振り返るなどして明確に意識できるようにすること」とあることから、問題解決後に過程を振り返ることでよさに気付かせ、問題を解決できたという成長を意識させることが、数学のよさの実感につながると考える。

### 2 研究の内容

#### (1) 研究の手立て

**手立て①** 「数学のよさ」に気付かせるための工夫（問題解決過程の振り返り）

問題解決後に過程を振り返り、本時の問題を解決した際に使った知識や考え方の「よさ」をロイロノートに記述させる。記述させることで「よさ」を明確にしたり、それらを共有することで、自分では気付くことのできなかつたものも含めた「よさ」に気付かせたりする。その際、「よさ」を記述しやすくするために、「○○のよさ」の「○○」の部分を入力したカードを用意する。

**手立て②** 「数学のよさ」を実感させるための工夫（問題解決によって成長を意識）

問題解決の際に「今までに気付いた表現や処理、考え方などの『よさ』が使えないか？」と問い掛けながら、使えそうな「よさ」を選択させ、論理的に考察したり、能率的に解決したりさせることで「よさ」を実感させる。その際、手立て①で記入したカードを用いさせ問題に取り組ませる。

#### (2) 検証方法

**検証①** 数学のよさを記述できているかで判断する。

**検証②** 提示問題に対して使えそうな「よさ」を選択し、論理的に、または、能率的に問題を解決できているかを生徒の記述から判断する。

### 3 授業実践 I

#### (1) 単元 「平方根」

#### (2) 指導過程

**手立て①** 問題解決後に過程を振り返り、「よさ」を記述させ、全体で共有する。

#### ◎振り返りの場面 1

教師の主な働きかけ	生徒の主な発言や活動
T: 今日以下のように工夫して積を計算しました。	
【生徒の記述より】	
(1) $\sqrt{8} \times \sqrt{18}$ $= 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$ $= 2 \times 3 \times (\sqrt{2})^2$ $= 12$	(2) $\sqrt{35} \times \sqrt{14}$ $= \sqrt{5 \times 7} \times \sqrt{2 \times 7}$ $= \sqrt{2 \times 5 \times 7^2}$ $= 7\sqrt{10}$

<p>T：問題解決の過程を振り返って、解決する際に使った数学の知識や考え方の「よさ」をロイロノートに記述しましょう。その際、「〇〇のよさ」の〇〇の部分は、すでに記入してあるものを使ってもいいですし、自分で記入しても構いません。</p>	<p>【生徒が記述した「よさ」】</p>	<p>√の中の数を簡単にすることのよさ ぱっと見て計算しやすくなったのでテストのとき、時間に余裕ができたようになった</p>	<p>√の中を素因数分解することのよさ 整数を見つけられたり、共通の数を見つけられたりする</p>
---	----------------------	--	---

◎振り返りの場面2

教師の主な働きかけ	生徒の主な発言や活動
-----------	------------

T：今日は  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  と  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  の大きさについて、様々な方法で考えました。問題解決の過程を振り返って、解決する際に使った数学の知識や考え方の「よさ」をロイロノートに記述しましょう。

【生徒の記述より】  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  と  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  を2乗すると  $\frac{1}{2}$  と  $\frac{2}{4}$  になって一緒だとわかる

$\frac{1}{\sqrt{2}}$  と  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  の大小関係を、様々な方法で確かめよう

$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

全部√の中に入れてみる。

近似値  $\sqrt{2} = 1.4142$

$\frac{1}{1.4142}$  と  $\frac{2}{1.4142}$

0.7071      0.7071

通分  $\frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

【生徒が記述した「よさ」】

√aの形にすることのよさ  
大小関係がわかりやすくなる

近似値を使って考えることのよさ  
近似値は小数になるけどルートは外れるから楽になる。

2乗することのよさ  
ルートを2乗することでルートが外れるから整数になって楽になる

分母を有理化することのよさ  
近似値を使うとき計算が楽になる

検証① 「よさ」を記述できているか、生徒の記述から検証する。

○	「よさ」を記述することができた。	16名
△	「よさ」を記述することができなかった。	4名

問題解決後に過程を振り返ることで、自力で問題を解決できなかった生徒も「よさ」を記述することができた。また、「〇〇のよさ」の〇〇の部分を生徒の解決方法をもとに教師が記入したカードを配ったことで、16名の生徒が自分の言葉で「よさ」を記述できた。

一方で、4名の生徒は「よさ」を記述できていなかったものの、「よさ」を共有することで、自分では気付かなかった「よさ」に気付くことができていた。自ら新たな「よさ」に気付くことができるよう、手立ての改善に取り組んでいく。

手立て② 前時までに気付いた「よさ」を生かして問題を解決させる。

教師の主な働きかけ	生徒の主な発言や活動
-----------	------------

T：今日は√を含む加法について考えてみましょう。

【提示問題】  $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{a}$  になります。aにあてはまる数を答えなさい。

T：今までに気付いた「よさ」を使って、問題を解決できないかな。

【生徒の記述より】

2乗を見つけることのよさ  
ルートの外に出すことができる。

$\sqrt{2} + \sqrt{8}$   
 $= \sqrt{2} + 2\sqrt{2}$   
 $= 3\sqrt{2}$   
 $3 = \sqrt{9}$ なので  
 $\sqrt{9} \times \sqrt{2} = \sqrt{18}$

√8を素因数分解して2乗を見つける。そして、√2を文字式と同じように考えて、これで行くと  $a+2a$  のように考える。  
 答えは√aで答えないといけないので、3を√にしてやる。

2乗を見つけることのよさ  
整数に直すことができる

$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{a}$   
 全部1×√2をする →  $2 + 4 = \sqrt{2a}$   
 $6 = \sqrt{2a}$   
 $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{2}} = \sqrt{a}$   $2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 $\sqrt{18} = \sqrt{a}$   $\sqrt{a} = \sqrt{18}$

検証② 使えそうな「よさ」を選択し、論理的に問題を解決できたかを生徒の記述から判断する。

○	使えそうな「よさ」を選択し、論理的に問題を解決できた。	13名
△	使えそうな「よさ」を選択したが、問題を解決できなかった。	3名
△	使えそうな「よさ」を選択できず、問題を解決できなかった。	3名

使えそうな「よさ」を選択させてから問題に取り組みさせたことで、直感で $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{10}$ と答える生徒はおらず、13名の生徒が選択した「よさ」を用いて論理的に問題を解決することができた。また、手立て①で「よさ」を記述できなかった生徒も、他生徒の書いた「よさ」を用いて問題を解決する姿があった。

一方で、「よさ」は選択できたが問題を解決できなかった生徒が3名いた。例えば、近似値のよさが使えないかと思い、電卓で計算した生徒がいたが、 $\sqrt{2}+\sqrt{8}$ の値を求めた時点で手が止まってしまった。近似値のよさを使おうとしたことを全体で紹介し、「今回は近似値のよさを使えないか」と問うと、「出てきた数(4.2426...)を2乗したらわかります」と気付いた生徒が出てきた。この共有によって、解決できなかった生徒にとっては「自分の選んだ『よさ』が使えるのだ」と分かり自信に繋がり、近似値が使えると思っていた生徒には近似値のよさを実感させることができた。

### (3) 授業実践Ⅱに向けた手立ての改善

#### 手立て① 「数学のよさ」に気付かせるための工夫

本時で学んだことの「よさ」だけでなく、本時で学んだからこそ感じた前時までの知識や考え方の「よさ」を記述してもよいことを伝えた。さらに、「よさ」に対する“デメリット”として、学んだ知識や考え方の「注意点」も記述させた。“デメリット”も意識させることで、次に学ぶ知識や考え方の「よさ」の気付きにつながるのではないかと考えた。

#### 手立て② 「数学のよさ」を実感させるための工夫

「今までに気付いた『よさ』を使って解決できないか？」という問い掛けだけでは「よさ」を選択できない生徒に対して、「似ているものが使えないか」と追加で問い掛け、選択できるようにさせる。また、実践Ⅰでは、「よさ」を選択できたものの問題を解決できなかった生徒がいたので、手立て①で記入した「注意点」もセットで意識するように声を掛けた。

## 4 授業実践Ⅱ

### (1) 単元 「二次方程式」

### (2) 指導過程

【手立て①】問題解決後に過程を振り返り、「よさ」や「注意点」を記述させ、全体で共有する。

6回のうち4回の授業の振り返りの場面で手立て①を行い、スクリーンを用いて全体で共有した。

【生徒から挙がった「よさ」や「注意点」】

$(x+m)^2=n$ の形のよさ 平方根の考えが使えるから、難しそうだけど意外と簡単。	$(x+m)^2=n$ で解くときの注意点 mを右に移項するときに+を書き間違えること	解の公式 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は、 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ のよさ この公式は多くのものに当てはまるのでこれを覚えていれば困ったときにあてはめて考えられる	解の公式 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は、 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ の注意点 計算が多いから符号ミスや計算ミスがなないようにする	因数分解を使って二次方程式を解く のよさ 解の公式と比べて、短い式で求めることができるので、テストなどの時間がないときに役立つ
---	--	--	---	---

検証① 「よさ」を記述できているか、生徒の記述から検証する。

○	「よさ」を記述することができた。	17名
△	「よさ」を記述することができなかった。	6名

「よさ」を記述できた生徒は、実践Ⅰの16名から17名へ増えたが、大きな変化ではなかった。「よさ」と対になる「注意点」を書かせたことは、「よさ」に気付かせるための手立てとしてはあまり有効ではなかったといえる。

因数分解を用いて二次方程式を解いた後に前時に学んだ解の公式を振り返って「解の公式は因数分解できない問題でも解くことができる」と「よさ」に記述している生徒がいた。よって、本時に学んだことと比較して前時に学んだことをもう一度振り返らせることは、「よさ」に気付かせる手立てとして有効ではないかと感じた。

今回「よさ」を記述できなかった6名中、1名は実践Ⅰで「よさ」を記述できていた生徒だった。その生徒は、実践Ⅰで教師とともに問題解決の過程を振り返ったため「よさ」を記述できたが、今回は自分1人で問題解決の過程を振り返った結果、「よさ」に気付かず終わってしまった。逆に、実践Ⅰで「よさ」を記述できなかった生徒に対し、教師がともに問題解決の過程を振り返ったところ、その生徒は「よさ」を記述できていた。

問題解決後に過程を振り返り、「よさ」を記述させる際に、「よさ」を共有させたり「よさ」と対になる「注意点」を書かせたりするだけでなく、複数の問題解決過程を比較させたり問題解決過程を式だけでなくある程度言語化したものを見せたりするなどの工夫も必要だと感じた。

【手立て②】前時までには気付いた「よさ」を生かして問題を解決させる。

教師の主な働きかけ	生徒の主な発言や活動
T: 二次方程式について学んできましたが、次の問題は、様々な方法で解くことができます。	
<b>提示問題</b> (1) $(x+1)^2 - 9 = 0$ (2) $3x^2 - 27 = 0$ (3) $x^2 + 12x + 12 = 0$ (4) $x^2 - 2x - 3 = 0$ (5) $5x^2 + 8x - 1 = 0$ (6) $4x^2 + 4x + 1 = 0$	
T: 「よさ」を生かして、これらの二次方程式を解きましょう。その際、今までに気付いた「注意点」も確認しながら取り組みましょう。 T: 使いそうな「よさ」がまだ見つからない人は、問題と「よさカード」を見比べて似ているものを探してみましょう。	S: 「解の公式のよさ」が使えるかな。これを使うときは計算が多くて間違いやすいから気を付けないといけないな。 S: かつこの2乗があるから「 $(x+m)^2 = n$ のよさ」が使いそう。展開しなくても平方根で考えればいいな。
【生徒の記述】	
<b>問題</b> $(x-1)^2 - 9 = 0$ <b>【考え①】</b> 使ってみる「よさ」↓↓ $(x+m)^2 = n$ の形のよさ 左辺を展開できるけど、展開しなくても平方根の考え方で解ける <b>考え方</b> $(x-1)^2 - 9 = 0$ $M^2 = 9$ $M = \pm 3$ $x-1 = \pm 3$ $x = -2, 4$	<b>問題</b> $(x-1)^2 - 9 = 0$ <b>【考え②】</b> 使ってみる「よさ」↓↓ 長い式をMとおくことのよさ 式がすっきりして、今まで学んだ公式などが使えることに気付ける <b>考え方</b> $(x-1)^2 - 9 = 0$ $M^2 - 9 = 0$ $(M+3)(M-3) = 0$ $(x-1+3)(x-1-3) = 0$ $(x+2)(x-4) = 0$ $x = -2, 4$
<b>問題</b> $x^2 + 12x + 12 = 0$ <b>【考え③】</b> 使ってみる「よさ」↓↓ $(x+m)^2 = n$ の形のよさ 平方根の考えが使えるから、難しそうだけど意外と簡単。 <b>考え方</b> $x^2 + 12x + 12 = 0$ <small>移項</small> $x^2 + 12x + 12 = 0$ $x^2 + 12x = -12$ $x^2 + 12x + 6^2 = -12 + 6^2$ $(x+6)^2 = 24$ $x+6 = \pm 2\sqrt{6}$ $x = -6 \pm 2\sqrt{6}$	<b>問題</b> $x^2 + 12x + 12 = 0$ <b>【考え④】</b> 使ってみる「よさ」↓↓ 解の公式 因数分解できない問題でもできる <b>考え方</b> $x^2 + 12x + 12 = 0$ $x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 12}}{2}$ $= \frac{-12 \pm \sqrt{96}}{2}$ $= \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{2}$ $= -6 \pm 2\sqrt{6}$
<b>検証②</b> 使いそうな「よさ」を選択し、論理的に問題を解決できたかを生徒の記述から判断する。	
<input type="radio"/> 使いそうな「よさ」を選択し、論理的に問題を解決できた。(6問すべて)	3名
<input type="radio"/> 使いそうな「よさ」を選択し、論理的に問題を解決できた。(1問以上5問以下)	17名
<input type="checkbox"/> 使いそうな「よさ」を選択できず、問題を1問も解決できなかった。	2名
なかなか「よさ」を選択できずに手が止まっていた生徒に対して「似ているものがないか」と声を掛けることで、使いそうな「よさ」を選択し、問題を解決できた生徒が3名いた。また、「よさ」とセットで「注意点」も意識させることで、上の【考え③】のように考え方に「注意点」を書きこみながら問題を解決する生徒もいた。この生徒は実践Iにおいて問題を解決できていなかった生徒だったため、「よさ」だけでなく「注意点」も意識させることは問題解決に有効な手立てだったと考えられる。	
1問も解決できない生徒は2名に留まったが、6問すべて正解できた生徒は3名のみだった。「注意点」について考えを深める時間を取るなど、手立てのさらなる改善が必要だと感じた。	

## 5 研究のまとめ

数学的な表現や処理のよさや、数学的な見方・考え方を働かせることのよさを「数学のよさ」として実感させられるよう実践を行った。手立て①で、問題解決後に過程を振り返って「よさ」を記述させたことで、自力では問題解決できなかった生徒も、問題解決に必要な数学的思考等を「よさ」と捉え、気付かせることができたように感じる。「よさ」に気付きやすくするために「注意点」を考えさせたが、あまり有効ではないことが分かった。今後は「よさ」を分類したり視点を与えたりするなどの工夫をしていきたい。手立て②では、問題を解決するためには、「よさ」だけでなく、よさを生かすための注意点にも着目する必要があると感じた。実践を通して、「問題解決の過程を振り返り、よさや注意点を学び、それらを生かしてまた問題解決した後に過程を振り返り新たなよさや注意点に気付く」ということの繰り返しが「数学のよさ」を深く実感することに繋がると感じた。社会や実生活も含め、様々な場面で「数学のよさ」を生かして問題解決する姿勢が育つように、これからも「数学のよさ」を実感できるような授業実践を行っていきたい。

【参考文献】中学校学習指導要領（平成29年告示）解説 数学編