関連付ける力を育てる数学指導

名古屋市立若水中学校　久米　大

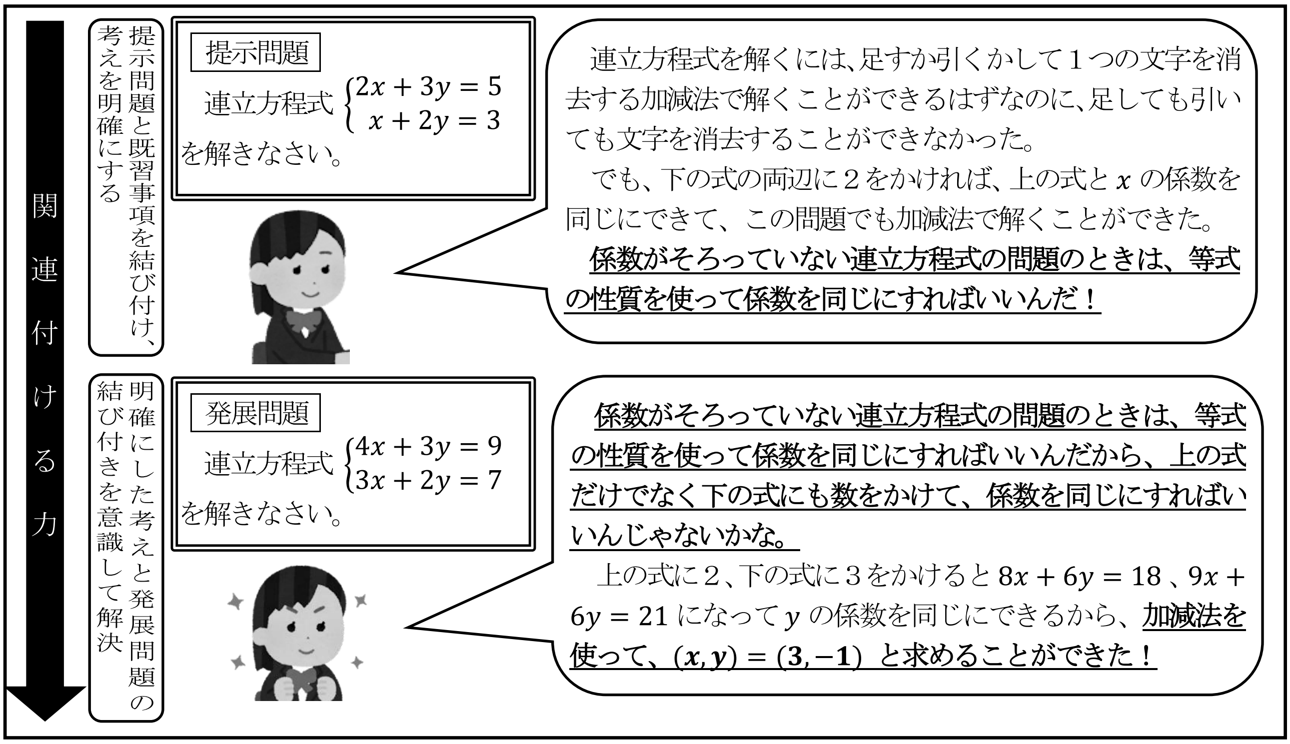
Ⅰ　研究のねらい

私は、数学という教科は既習事項を使えば、未習の問題でも解決することができるという教科の特性を生かして、関連付ける力の育成に取り組んできた。私の考える「関連付ける力」とは、「既習事項と解決しようとする問題を結び付けて考えを明確にし、結び付けたことを意識して発展的な問題を解決することができる力」である。

本校の生徒は、数学の問題を見たときに、既習事項と解決しようとする問題の共通点や相違点を意識し、どこに着眼点を置くべきかを考えることが少しずつできるようになってきた。しかし、何となく着眼点を置いてしまうことがあり、見通しをもち、根拠をもって問題解決をするまでには至っていない。さらに、問題を解いたらそこで満足をしてしまい、なぜそのような考え方をしたのかが明確になっていなかったり、自ら解決の過程を振り返ろうとしなかったりする生徒が多いように感じる。

盛山（2018）は「問い返しの発問をすることで、はじめて子どもは口を開き、自分の思考を振り返ります。そして、言語化しようとするのです。言語化できれば、考察の対象になり、みんなで議論したり、共有したりすることができます」「子どもが数学的な見方・考え方を働かせ、それらを豊かにするために授業で重視したいのが、『振り返り』です」と述べている。

そこで、私は問題を解決した後に結果の確認をするだけではなく、教師が問い返しの発問をすることで、生徒に思考を振り返らせ、言語化を促すことにした。そして、思考を言語化することができれば、解決しようとする問題と既習事項を結び付けることができるようになると考えた。「関連付ける力」が育成された姿は、２年生の「連立方程式の加減法」を例にすると、以下のような生徒である。〈資料１〉



〈資料１　「関連付ける」力が育成された生徒〉

Ⅱ　研究の内容

１　対象生徒　第３学年　33 人

２　手立て

(1)　段階的な問い返しの発問による思考の言語化

複数の解き方のある提示問題を解決した後に、「どこに着眼点を置きましたか」「どうしてそこに着眼点を置きましたか」などのように段階的な問い返しの発問を行い、自身の思考を言語化させてから、提示問題の解き方をまとめさせることで、提示問題と既習事項を結び付け、考えを明確にすることができるようにする。

(2)　発展問題を解決するのに、明確にした考えが使えそうであるのかを全体で共有

発展問題を提示した後に、発展問題を解決するのに、手立て１で明確にした考えが使えそうであるのかを全体で共有させることで、明確にした考えと発展問題を結び付けて解決することができるようにする。

３　検証方法

【検証事項①　段階的な問い返しの発問による思考の言語化】

段階的な問い返しの発問を行い、自身の思考を言語化させてから、提示問題の解き方をまとめさせることで、提示問題と既習事項を結び付け、考えを明確にすることができたか、プリントの記述から検証する。

【検証事項②　発展問題を解決するのに、明確にした考えが使えそうであるのかを全体で共有】

発展問題を提示した後に、発展問題を解決するのに、手立て１で明確にした考えが使えそうであるのかを全体で共有させることで、明確にした考えと発展問題を結び付けて解決することができたか、プリントの記述から検証する。

Ⅲ　授業実践１

１　単元　「二次方程式」（本時　11／13）

２　本時の目標　文字の置き方に着目して二次方程式をつくり、問題を解決できるようにする。

３　授業の様子

教師の主な働き掛け	生徒の主な発言・活動

提示問題　２つの異なる正の整数があります。２数の差が４になり、２数の積が 221 になるとき、これら２つの整数を求めなさい。

解答例①　小さい数をxとする。

$$x(x+4)=221$$
$$x^2+4x-221=0$$
$$(x-13)(x+17)=0$$
$$x=13,-17$$

よって、２つの整数は 13 と 17

解答例②　大きい数をxとする。

$$x(x-4)=221$$
$$x^2-4x-221=0$$
$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\times(-221)}}{2}$$
$$x=-13,\ 17$$

よって、２つの整数は 13 と 17

解答例③　２数の中央値をxとする。

$$(x+2)(x-2)=221$$
$$x^2-225=0$$
$$x=\pm15$$
$$15-2=13、15+2=17$$

よって、２つの整数は 13 と 17

手立て１　段階的な問い返しの発問による思考の言語化

Ｔ：どこに着眼点を置きましたか。

Ｓ：「２数の差が４」や「２つの異なる正の整数」です。

Ｓ：「２数の積が 221」のところです。

Ｔ：どうしてそこに着眼点を置きましたか。

Ｓ：小さい数か大きい数を文字で置けば、２数とも文字式で表現できるからです。

Ｓ：積なので二次方程式がつくれそうだと思いました。

Ｔ：今までに同じように考えた問題はありましたか。

Ｓ：連立方程式の文章題でやりました。

Ｓ：偶数や奇数を文字に置いて解く問題。

Ｔ：それでは、振り返った内容をもとにして、提示問題の解き方についてまとめましょう。まとめる際には、手順だけでなく、キーワードや説明も書くようにしましょう。

２数の差が４であることに注目すると、２数を１つの文字でおくことができる。

→　x，$x+4$

積が221なので二次方程式をつくることができる。

→　$x(x+4)=221$

〈資料２　提示問題についてまとめた生徒の記述〉

【検証①】段階的な問い返しの発問を行い、自身の思考を言語化させてから、提示問題の解き方をまとめさせることで、提示問題と既習事項を結び付け、考えを明確にすることができたか、プリントの記述から検証する。（欠席８人）

○	提示問題と既習事項を結び付け、考えを明確にすることができた。	15 人
△	提示問題と既習事項を結び付け、考えを明確にすることができなかった。	10 人

【考察】提示問題と既習事項を結び付け、考えを明確にすることができなかった生徒は 10 人いた。これらの生徒は、二次方程式をつくればよいことには気付くことができていたが、「２数の一方をxと置くこと」や「２数を１つの文字で表すこと」といったどうすれば二次方程式がつくれるのかということを記述することができていなかった。これは、考えを明確にするときに、言語化したことを意識させることができなかったことが原因であると考える。

手立て２　発展問題を解決するのに、明確にした考えが使えそうであるのかを全体で共有

発展問題　周の長さが 104 ㎝、面積が 576 ㎠ の長方形の縦の長さと横の長さを求めなさい。

Ｔ：発展問題を考えるのに、先程考えた提示問題で何か使えそうなものはありますか。

Ｓ：求めたい数を x と置くことで、二次方程式をつくることができると思います。

Ｓ：二次方程式を解くのに解の公式や平方根の考えは活用できると思います。

Ｔ：求めたい数が複数あるときには、小さい数を x と置けばよいですか。

Ｓ：大きい数や真ん中の数でも方程式を使って解くことができると思います。

Ｔ：共有したことを意識しながら、発展問題に取り組んでみましょう。

$$x(52-x)=576$$
$$-x^2+52x-576=0$$
$$x^2-52x+576=0$$
$$(x-26)^2-100=0$$
$$x-26=\pm10$$
$$x=36,16$$

縦 36 cm　横 16 cm，縦 16 cm　横 36 cm

〈資料３　発展問題を解決した生徒の記述〉

【検証②】発展問題を提示した後に、発展問題を解決するのに、手立て１で明確にした考えが使えそうであるのかを全体で共有させることで、明確にした考えと発展問題を結び付けて解決することができたか、プリントの記述から検証する。（欠席８人）

○	明確にした考えと発展問題を結び付けて解決することができた。	９人
△	明確にした考えと発展問題を結び付けて解決することができなかった。	16 人

【考察】明確にした考えと発展問題を結び付けて解決することができなかった生徒は 16 人いた。これらの生徒のうち、８人の生徒は立式できていた。解決することができなかった原因としては、二次方程式を解く過程で、因数分解ができていなかったことであると考える。残りの８人の生徒は、立式もできなかった。xを用いて方程式をつくろうとしていたが、数量関係を正しく表現することができていなかった。これは、発展問題を解決するのに、明確にした考えが使えそうであるのかについて、全体での共有の仕方が不十分だったからであると考える。

４　手立ての改善

(1)　段階的な問い返しの発問による思考の言語化

複数の解き方のある提示問題を解決した後に、「どこに着眼点を置きましたか」「どうしてそこに着眼点を置きましたか」などのように段階的な問い返しの発問を行い、生徒の思考を言語化させる。言語化した生徒の思考を板書することで視覚化して、全体で共有する。共有後、明確にした考えについて改めて追加の問い返しの発問をしてから提示問題の解き方をまとめさせることで、提示問題と既習事項を結び付け、考えを明確にできるようにする。

(2)　明確にした考えと発展問題の結び付きを全体で共有

発展問題を提示した後に、発展問題を解決するのに、手立て１で明確にした考えが使えそうであるのかを考えさせる際に、共通点と相違点を考えさせる発問と「提示問題の考え方を使うための一言キーワードは何ですか」という発問をして、全体で共有させることで、明確にした考えと発展問題を結び付けて解決することができるようにする。

Ⅳ　授業実践２

１　単元　「関数 $y=ax^2$」　（本時　16／16）

２　本時の目標　放物線と直線の交点座標を既習事項と結び付けて求め、問題を解決できるようにする。

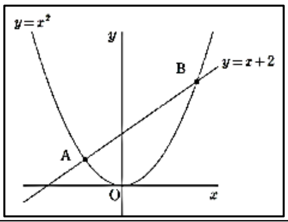
３　授業の様子

教師の主な働き掛け	生徒の主な発言・活動

提示問題

関数$y=x^2$のグラフと一次関数$y=x+2$ のグラフの交点をそれぞれ x 座標の小さい方から点A、B とするとき、２点A、B の座標を求めなさい。

※　生徒に目盛り付きの座標軸を与える。



解答例①

$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+2 \end{cases}$ より、$x^2-x-2=0$

よって、$x=2,-1$ となり、

点A(-1, 1)、点B(2, 4)

解答例②

x	… -1　0　1　2 …
x^2	… 1　0　1　4 …
$x+2$	… 1　2　3　4 …

よって、点A(-1, 1)、点B(2, 4)

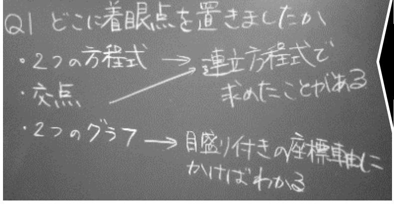
解答例③

目盛り付きの座標軸にグラフをかいて読み取る。

よって、点A(-1, 1)、点B(2, 4)

手立て１　段階的な問い返しの発問による思考の言語化

教師の主な働き掛け	生徒の主な発言・活動
Ｔ：どこに着眼点を置きましたか。	Ｓ：２つの方程式。 Ｓ：交点。 Ｓ：２つのグラフ。
Ｔ：どうしてそこに着眼点を置きましたか。	Ｓ：交点は連立方程式で求めたことがあるからです。 Ｓ：２つのグラフを目盛り付きの座標軸にかけば分かると思ったからです。



〈資料４ 生徒の意見を整理した板書〉

教師の主な働き掛け	生徒の主な発言・活動
Ｔ：表を作って順番に考えたらどんな問題でも交点は求められそうですか。	Ｓ：数が大きくなると時間はかかるし、交点が整数でなかったら求められません。
Ｔ：目盛りのある座標軸にグラフをかく場合はどうですか。	Ｓ：目盛りが足りなかったり、整数でなかったりすると求められません。 Ｓ：交点が分数のときにも困らないと思います。
Ｔ：それでは連立方程式はどうですか。	Ｓ：計算は難しいときがあるけど、いつでも求められます。

T：それでは、振り返った内容をもとにして、提示問題の解き方についてまとめましょう。まとめる際には、手順だけでなく、キーワードや説明も書くようにしましょう。

・交点を求める場合、2つの式を連立方程式にして解く。
・答えの値が整数になりそうだったらグラフをかいて求める。

〈資料５　提示問題についてまとめた生徒の記述〉

【検証①】段階的な問い返しの発問を行い、自身の思考を言語化させ、板書することで視覚化して、全体で共有する。さらに、明確にした考えについて追加の問い返しの発問をしてから、提示問題の解き方をまとめさせることで、提示問題と既習事項を結び付け、考えを明確にすることができたか、プリントの記述から検証する。（欠席４人）

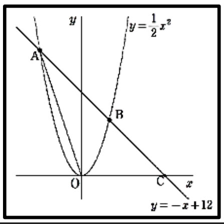
○	提示問題と既習事項を結び付け、考えを明確にすることができた。	27 人
△	提示問題と既習事項を結び付け、考えを明確にすることができなかった。	２人

【考察】提示問題と既習事項を結び付け、考えを明確にすることができなかった生徒は２人いた。これらの生徒は、プリントへの記述が未記入の生徒であった。２人とも着眼点を書くことはできていたが、提示問題と既習問題を結び付けることができず、何から考えるべきか理解できていなかった。

手立て２　発展問題を解決するのに、明確にした考えが使えそうであるのかを全体で共有

発展問題

関数$y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフと一次関数$y=-x+12$ のグラフの交点をそれぞれx 座標の小さい方から点A、B、一次関数$y=-x+12$のグラフとx軸の交点を点C、原点をＯとするとき、△OAC の面積を求めなさい。
ただし、１目盛り１ ㎝とする。



T：発展問題と提示問題で似ているところはありますか。
T：発展問題と提示問題で違うところはありますか。

S：それぞれの関数の式が分かっています。
S：２つの交点A、Bの座標が分かりません。
S：目盛り付きの座標軸がありません。
S：三角形の面積を求める問題になりました。
S：一次関数のグラフが右下がりです。

T：発展問題を考えるのに、先程考えた提示問題で何か使えそうなものはありますか。

S：連立方程式で交点A、B の座標を求めることができます。
S：交点を求めれば面積を求められそうです。

T：提示問題の考え方を使うための一言キーワードは何ですか。

S：交点。　　S：連立方程式。

T：共有したことを意識しながら発展問題に取り組んでみましょう。

$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \cdots ① \\ y=-x+12 \cdots ② \end{cases}$

①→②代入

$\frac{1}{2}x^2=-x+12$

$x^2+2x-24=0$

$(x+6)(x-4)=0$

$x=4,\ \cancel{-6}$

$12\times \cancel{18}^{9}\times\frac{1}{\cancel{2}}=108$

108㎠

〈資料６　発展問題を解決した生徒の記述〉

【検証②】発展問題を提示した後に、発展問題を解決するのに、手立て１で明確にした考えが使えそうであるのかを共通点と相違点、提示問題の考え方を使うための一言キーワードを考えさせる発問をして全体で共有させることで、明確にした考えと発展問題を結び付けて解決することができたか、プリントの記述から検証する。（欠席４人）

○	明確にした考えと発展問題を結び付けて解決することができた。	18 人
△	明確にした考えと発展問題を結び付けて解決することができなかった。	11 人

【考察】明確にした考えと発展問題を結び付けて解決することができなかった生徒は 11 人いた。これらの生徒のうち、７人の生徒は連立方程式を使って交点の座標を求めることまではできていた。解決できなかった原因としては、△OAC の面積を求めるための計算やx 座標とy 座標を間違えていたことであると考える。残りの４人の生徒は、交点の座標を求めることができていなかったものの、ほとんどの生徒が連立方程式で交点の座標を求めようとすることはできていた。これは、明確にした考えと発展問題を結び付ければ解決することができると考えていることの表れであると考える。

Ⅴ　研究のまとめ

「段階的な問い返しの発問による思考の言語化」は、段階的な問い返しの発問を行い、思考を言語化させてから提示問題の解き方をまとめさせたことは、提示問題と既習事項を結び付け、考えを明確にするために有効であった。言語化した思考を、視覚化することで、より考えを明確にすることができることが分かった。

「発展問題を解決するのに、明確にした考えが使えそうであるのかを全体で共有」は、共通点と相違点や提示問題の考え方を使うための一言キーワードを考えさせたことにより、明確にした考えと発展問題を結び付けて解決することができるようになることが分かった。

今後は、本実践のような活動を日頃の授業の様々な場面で取り入れ、問題解決をしていく経験を積み重ねていくことで、教師が問い返しの発問をしなくても、関連付ける力を発揮して、問題を解決していける生徒を育てていきたい。

【参考文献】　盛山隆雄　「数学的な見方・考え方を働かせる算数授業」　明治図書　(2018)